

HƯỚNG DẪN, ĐÁP ÁN- ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN- KHỐI 11
Năm học 2020-2021

Câu 1

$$a. \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{2x+y+1}, v = \sqrt{x+y}; u \geq 0; v \geq 0$, điều kiện $\begin{cases} 2x+y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ (0.5 điểm)

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ (2x+y+1) + (x+y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ (2.0 điểm)

Kết hợp điều kiện, ta chọn $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1}=2 \\ \sqrt{x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. (0.5 điểm)

Vậy hệ có nghiệm $(2; -1)$.

$$b. \sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{29}$$

Phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{29} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2} + \sqrt{(-x-1)^2+3^2} = \sqrt{29}$

Đặt $\vec{u} = (x-1; 2); \vec{v} = (-x-1; 3) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-2; 5)$. (0.5 điểm)

$|\vec{u}| = \sqrt{(x-1)^2+2^2}; |\vec{v}| = \sqrt{(-x-1)^2+3^2} = \sqrt{(x+1)^2+3^2}$ (1.0 điểm)

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{29}$ (0.5 điểm)

Mặt khác, ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2} + \sqrt{(x+1)^2+3^2} \geq \sqrt{29}$ (0.5 điểm)

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng. Suy ra tồn tại $k > 0$ sao cho

$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k(-x-1) \\ 2 = k.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$. (0.5 điểm)

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{5}$.

Câu 2

a. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (1), với $x \in [-2\pi; 4\pi]$.

Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) [(\sin x - \cos x) - \sin x \cdot \cos x + 1] = 0 \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \quad (2) \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Hoặc } (\sin x - \cos x) - \sin x \cdot \cos x + 1 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ điều kiện } t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]. \text{ Suy ra } \sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow -1 = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Vì $x \in [-2\pi; 4\pi]$ nên phương trình có các nghiệm là:

$$x = -\frac{5\pi}{4}; x = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{7\pi}{4}; x = \frac{11\pi}{4}; x = \frac{15\pi}{4}; x = -2\pi; x = 0; x = 2\pi; x = 4\pi;$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{2}; \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: } 16\pi; \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{b. Cho hệ phương trình: } \begin{cases} x - 3y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) suy ra } x = 3(y+1) \quad (3). \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Thay (3) vào (2) ta được: } 9(y+1)^2 + y^2 - 6(y+1) - 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 5y - 3 = 0 \quad (4) \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Do $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ là hai nghiệm của phương trình trên nên $y_1; y_2$ là nghiệm của (4).

$$\text{Theo định lý Vi-et, ta có: } \begin{cases} y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \cdot y_2 = -\frac{3}{5} \end{cases} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Từ (3) suy ra } x_1 - x_2 = 3(y_1 - y_2); \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10(y_1 - y_2)^2} \quad (1.0 \text{ điểm})$$

$$\sqrt{10(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]} = \sqrt{10\left(1 + \frac{12}{5}\right)} = \sqrt{34}. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{34}.$$

Câu 3

a. Cho $x+y=1$; $xy>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$.

$$\text{Ta có } P=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2+y^2+\frac{1}{y^2}+2=x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}+4=(x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)+4 \quad (*)$$

(0.5 điểm)

$$\text{Mà } x+y=1; xy>0 \text{ nên } x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{x^2y^2} \geq 16 \quad (1)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x=y=\frac{1}{2} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Mặt khác, } x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq 2xy+x^2+y^2 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2=1 \quad (2) \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Thay (1),(2) vào (*) ta được: } \min P = \frac{25}{2}. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } x=y=\frac{1}{2}.$$

b.

$$\text{Ta có } \cos A = -\cos(B+C) \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} = 1 - \cot B \cdot \cot C > 0 \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\sqrt{\frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C}} + \sqrt{\frac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A}} + \sqrt{\frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B}} = \sqrt{1 - \cot B \cdot \cot C} + \sqrt{1 - \cot C \cdot \cot A} + \sqrt{1 - \cot A \cdot \cot B}$$
$$\text{Đặt } x = \cot A \cot B; y = \cot B \cot C; z = \cot C \cot A, \text{ ta có } x+y+z=1. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Ta có } (1-x) + \frac{2}{3} \geq 2\sqrt{(1-x)\frac{2}{3}} \quad (1); (1-y) + \frac{2}{3} \geq 2\sqrt{(1-y)\frac{2}{3}} \quad (2); (1-z) + \frac{2}{3} \geq 2\sqrt{(1-z)\frac{2}{3}} \quad (3) \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Cộng (1); (2); (3) vế theo vế ta được

$$3+2-(x+y+z) \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}) \Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z} \leq \sqrt{6}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } x=y=z. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Vậy nếu } \Delta ABC \text{ có } \sqrt{\frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C}} + \sqrt{\frac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A}} + \sqrt{\frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B}} = \sqrt{6} \text{ thì } \Delta ABC \text{ đều.}$$

Câu 4

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a-4; -2); \overrightarrow{MB} = (-4; b-2)$ (0.5 điểm)

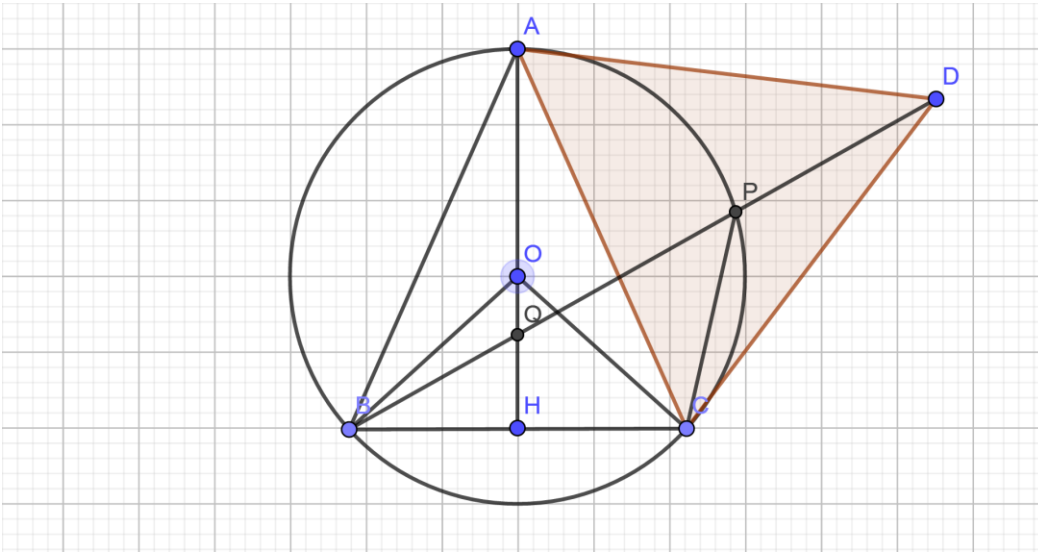
ΔMAB vuông tại M nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -4(a-4) - 2(b-2) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 2a$, với $0 \leq a \leq 5$ (0.5 điểm)

Diện tích ΔMAB là: $\frac{1}{2}MA \cdot MB = \frac{1}{2}\sqrt{(a-4)^2 + 4} \cdot \sqrt{4^2 + (b-2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \left[(a-4)^2 + 4 \right] = (a-4)^2 + 4 \geq 4$ (0.5 điểm)

Dấu “=” xảy ra khi $a = 4; b = 2$.

Ta có: $E = a^2 + b^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. (0.5 điểm)

Câu 5



Tứ giác $ADCQ$ nội tiếp đường tròn do $\angle ADQ = \angle ACQ$ (cùng bằng $\angle ABQ$)

Suy ra $\angle PDC = \angle QAC = \angle OAB = \angle ABO$

Mặt khác, ta có: $\angle ACD = \angle AQD = \angle BQH = 60^\circ$ (0.5 điểm)

$\Rightarrow \angle PCD = 60^\circ - \angle ACP$ (*)

Do tứ giác $ABCP$ nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ nên $\angle ACP = \angle ABQ$.

Từ (*), ta có $\angle PCD = 60^\circ - \angle ACP = 60^\circ - \angle ABQ = \angle OAB$ (0.5 điểm)

Xét 2 tam giác ΔOAB và ΔPCD có $\angle PDC = \angle ABO$; $AB = CD$; $\angle PCD = \angle OAB$

$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta PDC$ (g - c - g) $\Rightarrow PD = OA = R$. (0.5 điểm)

Vậy $OA^2 + OB^2 + OC^2 + PD^2 = 4R^2$ (0.5 điểm)