

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG MÔN TOÁN 11. NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1(6 đ)	a) Giải phương trình $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$. Đặt $T = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}, T \geq 0$ $\Rightarrow T^2 = 6x^2 - 12x + 7 = -6(2x - x^2) + 7 \Rightarrow 2x - x^2 = \frac{T^2 - 7}{-6}.$ Thay vào PT trên ta được $\frac{T^2 - 7}{-6} + T = 0 \Leftrightarrow T^2 - 6T - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = -1(L) \\ T = 7 \end{cases}$ Với $T = 7 \Rightarrow 6x^2 - 12x + 7 = 7^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\sqrt{2} \\ x = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$ Kết luận PT trên có 2 nghiệm là $x = 1 - 2\sqrt{2}, x = 1 + 2\sqrt{2}$	3
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$ Hệ trên $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy + x + y = 4 \\ (x + y)^2 - xy + x + y = 2 \end{cases}$. Đặt $S = x + y, P = xy$ ta được $\begin{cases} S^2 - 2P + S = 4 \\ S^2 - P + S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -2 \end{cases}; \begin{cases} S = -1 \\ P = -2 \end{cases}$ + $\begin{cases} S = 0 \\ P = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ + $\begin{cases} S = -1 \\ P = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ Kết luận PT trên có 4N là $(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (1; -2), (-2; 1)$	3
Câu 2(5đ)	a) Với bốn số a, b, x, y bất kỳ, ta có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad (1)$ Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có $H^2 = [a(2 - bc) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(b + c)]^2 \leq (a^2 + 2) \cdot [(2 - bc)^2 + 2(b + c)^2] = (a^2 + 2) \cdot (b^2 + 2) \cdot (c^2 + 2)$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) = \frac{1}{6}(a^2 + 2) \cdot 3(b^2 + 2) \cdot 2(c^2 + 2)$ $\leq \frac{1}{6} \left[\frac{(a^2 + 2) + 3(b^2 + 2) + 2(c^2 + 2)}{3} \right]^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{a^2 + 3b^2 + 2c^2 + 12}{3} \right)^3 = 36$ Từ đó suy ra $H^2 \leq 36$. Suy ra $-6 \leq H \leq 6$.	

	Mặt khác với $a=2, b=0, c=1$ thì $a^2+3b^2+2c^2=6$ và $H=6$. Với $a=-2, b=0, c=-1$ thì $a^2+3b^2+2c^2=6$ và $H=-6$ Vậy $\min H=-6$ khi $a=-2, b=0, c=-1$. $\max H=6$ khi $a=2, b=0, c=1$. b) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4 \Rightarrow \frac{3}{4} \left(a + \frac{4}{a} \right) \geq 3, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a=2$ $b + \frac{9}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{9}{b}} = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(b + \frac{9}{b} \right) \geq 3, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } b=3$ $c + \frac{16}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{16}{c}} = 8 \Rightarrow \frac{1}{4} \left(c + \frac{16}{c} \right) \geq 2, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } c=4$ Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều, thu được $\frac{3a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 8$ (1) Mặt khác, do $a+2b+3c \geq 20$ nên $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4} \geq 5$ (chia hai vế cho 4) (2) Cộng (1) và (2), vế đối vế, ta được $L = a+b+c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=3, c=4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức L bằng 13, đạt được khi $a=2, b=3, c=4$.	3 2
Câu 3 (4đ)	Ta có: $f(x+y) = f(x) + y \Rightarrow f(y) = f(0) + y \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = a + x$ với $a = f(0)$. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0.$ Mặt khác $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)+x}{x^2} = \frac{a+x}{x^2} \quad \forall x \neq 0$. $\Rightarrow a + \frac{1}{x} = \frac{a+x}{x^2} \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow ax^2 = a \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow a = 0.$ Vậy $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.	4

**Câu
4(5)**

Ta biết $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ (H là trực tâm tam giác ABC)

Suy ra $H(3;1) \Rightarrow pt\ MH: \frac{x-4}{3-4} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow x-y-2=0$.

Do B là giao của (d) và đường thẳng MH nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(1;-1).$$

Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Rightarrow N(5;1)$

$$\overrightarrow{MN} = (1;-1)$$

$$\overrightarrow{n_{AC}} = (1;1)$$

Ta có $pt\ AC: 1(x-5)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-6=0$.

Do A thuộc đường thẳng AC nên $A(t;6-t)$,

kết hợp với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (t-4)^2 + (6-t)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=7 \end{cases}$$

+) Với $t=3 \Rightarrow A(3;3), C(7;-1)$

+) Với $t=7 \Rightarrow A(7;-1), C(3;3)$

Vậy $A(3;3), B(1;-1), C(7;-1)$ hoặc $A(7;-1), B(1;-1), C(3;3)$

--	--	--

***Chú ý :** Các cách làm khác của học sinh đúng : cho đủ số điểm.